

# Sur la systole de la sphère au voisinage de la métrique standard

Florent BALACHEFF\*

2 février 2008

## Résumé

Nous étudions l'aire systolique (défini comme le rapport de l'aire sur le carré de la systole) de la sphère munie d'une métrique riemannienne lisse comme fonction de cette métrique. Cette fonction, bornée inférieurement par une quantité strictement positive sur l'espace des métriques, admet la métrique ronde standard  $g_0$  pour point critique, bien que celle-ci ne corresponde pas au minimum global conjecturé : nous montrons que pour toute direction tangente à l'espace des métriques en  $g_0$ , il existe une variation de métrique dans cette direction le long de laquelle l'aire systolique ne peut qu'augmenter.

## 1 Introduction

Étant donnée une métrique riemannienne lisse  $g$  sur la sphère de dimension 2 notée  $S^2$ , on définit la *systole* de  $(S^2, g)$  comme la plus petite longueur d'une géodésique fermée non réduite à un point. On note  $\text{sys}(S^2, g)$  cette quantité, qui est strictement positive, et réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée.

Nous pouvons alors définir la *constante systolique* de  $S^2$  comme la quantité

$$\mathfrak{S}(S^2) = \inf_g \frac{\mathcal{A}(S^2, g)}{(\text{sys}(S^2, g))^2},$$

où  $\mathcal{A}(S^2, g)$  désigne l'aire riemannienne de  $(S^2, g)$  et l'infimum est pris sur l'ensemble des métriques riemanniennes lisses de  $S^2$ . Cette quantité est non nulle : ce résultat a été démontré par C. Croke [3], puis récemment amélioré par A. Nabutovsky et R. Rotman [8] d'une part, S. Sabourau [10] d'autre part :

$$\mathfrak{S}(S^2) \geq \frac{1}{64}.$$

---

\*Section de Mathématiques, Université de Genève, rue du Lièvre 2-4, C.P. 64 CH-1211 Genève 4, Mail : Florent.Balacheff@math.unige.ch

Il est conjecturé que

$$\mathfrak{S}(S^2) = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

dont la valeur est atteinte pour la métrique singulière (proposée par E. Calabi) obtenue en recollant le long de leur bord deux triangles équilatéraux. Notons dès maintenant que le rapport aire sur systole au carré pour la métrique standard de la 2-sphère vaut  $\frac{1}{\pi}$ , ce qui est strictement supérieur à la valeur  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

Nous nous intéressons au comportement local du rapport de l'aire sur la systole au carré pour une métrique  $g$  au voisinage de la métrique standard  $g_0$ , que nous nommerons *aire systolique* et noterons naturellement  $\mathfrak{S}(S^2, g)$ . Ce rapport n'est pas continu sur l'espace des métriques lisses muni de la topologie forte, mais il est continu au voisinage de la métrique standard. En effet, E. Calabi et J. Cao ont montré que pour une métrique  $g$  à courbure positive sur la sphère  $S^2$ , la systole coïncidait avec la plus petite longueur d'une géodésique fermée obtenue par un procédé de minimax sur l'espace des cycles unidimensionnels (voir [2]). Cette dernière quantité étant continue en la métrique, et les métriques proches de la métrique standard étant à courbure positive, nous obtenons la continuité de l'aire systolique au voisinage de la métrique standard.

Étant donnée une variation  $\{g_t\}$  de  $g_0$  par une famille de métriques lisses dépendant de manière lisse d'un paramètre réel  $t$ , nous étudions le comportement possible de  $\mathfrak{S}(S^2, g_t)$  en fonction de  $t$  au voisinage de 0. Par le théorème d'uniformisation, toute métrique sur  $S^2$  est conformément équivalente à la métrique standard, et pour cette raison, nous ne nous intéresserons qu'aux variations de  $g_0$  par des métriques dans sa classe conforme.

L'espace des métriques lisses conformes à  $g_0$  est naturellement identifié à l'espace  $C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$  des fonctions lisses sur  $S^2$  à valeurs réelles strictement positives. Nous munissons cet espace de la topologie forte. Comme cet espace est localement homéomorphe à l'espace vectoriel  $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$  des fonctions lisses sur  $S^2$  à valeurs réelles (muni également de la topologie forte), ce dernier peut être pensé comme l'espace tangent en  $g_0$  à l'espace des métriques lisses conformes à  $g_0$ .

L'application qui à  $\Phi \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$  associe  $\mathfrak{S}(S^2, \Phi \cdot g_0)$  est donc une application continue au voisinage de l'application constante égale à 1 et nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème** *Pour chaque  $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , il existe une famille lisse à un paramètre de fonctions  $\Phi_t \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$  telle que  $\Phi_0 = 1$ ,  $\frac{d\Phi_t}{dt}\big|_0 = f$  et*

$$\mathfrak{S}(S^2, \Phi_t \cdot g_0) \geq \frac{1}{\pi},$$

*avec égalité pour  $t \neq 0$  si et seulement si  $f$  est une fonction constante.*

Cet énoncé suggère fortement que  $g_0$  soit un minimum local.

Nous pouvons généraliser la notion de point critique d'une fonction continue définie sur une variété compacte de dimension finie due à M. Morse [7] aux fonctions continues définies sur un espace topologique localement homéomorphe à un espace vectoriel : étant donné un espace topologique  $M$  modelé localement sur un espace vectoriel topologique  $V$ , et une application  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  continue, un point  $x_0$  de  $M$  est dit *régulier* s'il existe une carte locale  $(U, \phi)$  de classe  $C^0$  centrée en  $x_0$  et une forme linéaire non nulle  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$F(x) = F(x_0) + T(\phi(x)),$$

pour chaque  $x \in U$ . Dans le cas contraire, le point est dit *critique*.

Nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire** *La métrique  $g_0$  est un point critique de la fonctionnelle aire systolique.*

Notons qu'il est remarquable d'obtenir un point critique, qui ne corresponde pas au minimum global conjecturé.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous commençons par montrer que l'aire systolique est un minimum local strict le long de certaines variations associées aux éléments  $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$  vérifiant  $\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0$ . Un corollaire immédiat en est le théorème annoncé. Dans la troisième section, nous présentons deux résultats dus respectivement à V. Guillemin [5] et à P. Pu [9] qui permettent de mieux appréhender le comportement local de l'aire systolique au voisinage de  $g_0$ . Enfin, nous formulons dans la dernière section quelques remarques et questions.

## 2 Étude locale de l'aire systolique et variations minimisantes

Le théorème annoncé dans l'introduction est une conséquence du résultat suivant :

**Proposition** *Soit  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse non nulle vérifiant*

$$\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0.$$

*On associe à  $f$  la variation de métrique  $g_t = (1 + tf)^2 \cdot g_0$  et on note  $a > 0$  le plus grand réel (éventuellement infini) tel que  $g_t$  soit bien définie pour  $|t| < a$ . Alors il existe  $\alpha \in ]0, a[$  tel que pour tout réel  $t$  vérifiant  $0 < |t| < \alpha$ ,*

$$\mathfrak{S}(S^2, g_t) > \mathfrak{S}(S^2, g_0) = \frac{1}{\pi}.$$

En effet, considérons la variation  $g_t = (1 + t) \cdot g_0$ , et notons  $u \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$  le vecteur dérivé correspondant ( $u$  est la fonction constante sur  $S^2$  égale à 1). Nous avons une décomposition naturelle de  $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$  en somme directe :

$$C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}u \oplus \{f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid \int_{S^2} f dv_{g_0} = 0\}. \quad (2.1)$$

Remarquons que l'espace  $\{f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid \int_{S^2} f dv_{g_0} = 0\}$  peut être pensé comme le noyau de la différentielle en  $g_0$  de l'application  $\mathcal{A}(S^2, \cdot)$  qui à  $\Phi \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$  associe  $\mathcal{A}(S^2, \Phi \cdot g_0)$ .

Comme l'aire systolique est invariante par changement d'échelle (la transformation d'une métrique  $g$  en  $\mu \cdot g$  où  $\mu$  est un réel strictement positif ne modifie pas la valeur de l'aire systolique), nous obtenons pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour toute métrique  $g$

$$\mathfrak{S}(S^2, (1 + \lambda t) \cdot g) = \mathfrak{S}(S^2, g).$$

Étant donnée une fonction  $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , nous pouvons décomposer  $f$  dans la somme directe (2.1) comme

$$f = \lambda(f)u + (f - \lambda(f)u)$$

où  $\lambda(f) = \int_{S^2} f dv_{g_0}$ , et en considérant la variation

$$\tilde{g}_t = (1 + \lambda(f)t)(1 + t(f - \lambda(f)))^2 g_0,$$

nous obtenons le théorème.

Pour démontrer la proposition, nous allons procéder comme suit. Étant fixée la fonction lisse non nulle  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0$ , nous pouvons calculer l'aire de la métrique  $g_t$  associée. Nous voyons facilement que

$$\mathcal{A}(S^2, g_t) = \mathcal{A}(S^2, g_0) + t^2 \int_{S^2} f^2 dv_{g_0}.$$

La proposition va alors découler de l'inégalité

$$\text{sys}(S^2, g_t) \leq 2\pi \quad (2.2)$$

pour  $t$  dans un voisinage ouvert de 0. Avant de démontrer cette inégalité, nous commençons tout d'abord par quelques rappels.

## 2.1 Rappels et notations

**Le principe du minimax.** Un outil important pour étudier la systole est fourni par le procédé de minimax. Pour plus de détails, voir [6].

Soit  $(S^2, g)$  une 2-sphère riemannienne. Nous commençons par considérer  $\Lambda S^2$  l'espace des courbes fermées, défini comme l'espace des applications  $c : S^1 \rightarrow S^2$  de classe  $C^1$  par morceaux muni de la topologie  $C^0$ . Les groupes

$SO(2)$  et  $O(2)$  agissent canoniquement sur  $\Lambda S^2$  et on note  $\Pi S^2$  et  $\tilde{\Pi} S^2$  les quotients respectifs (respectivement *espace des courbes non paramétrées* et *espace des courbes non paramétrées non orientées*),  $\pi_O$  et  $\pi_{SO}$  les projections associées et  $\pi_S$  la projection naturelle de  $\Pi S^2$  sur  $\tilde{\Pi} S^2$ . La fonctionnelle énergie  $E_g$  initialement définie sur  $\Lambda S^2$  par

$$E_g(c) = 1/2 \int_{S^1} g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt$$

induit une application sur  $\Pi S^2$  et  $\tilde{\Pi} S^2$  respectivement, pour laquelle les points critiques sont exactement les orbites de points critiques de  $\Lambda S^2$  pour l'action correspondante. Or les points critiques de  $E$  dans  $\Lambda S^2$  sont exactement les géodésiques fermées (éventuellement réduites à un point).

Soit  $w$  une classe d'homologie non nulle de  $\Lambda S^2$  (respectivement  $\Pi S^2$  et  $\tilde{\Pi} S^2$ ) à coefficients quelconques. Pour chaque cycle singulier  $u \in w$ , on note  $|u|$  la réunion des images des simplexes singuliers de  $u$ .

Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 1** (voir [6]) Soit  $\kappa_w = \inf_{u \in w} \sup_{c \in |u|} E_g(c)$ . Alors  $\kappa_w > 0$  et il existe une géodésique fermée  $c_w \in \Lambda M$  vérifiant  $E_g(c_w) = \kappa_w$ .

**Familles particulières de courbes sur  $(S^2, g_0)$ .** La géométrie de la sphère canonique présente naturellement plusieurs familles de courbes intéressantes, dans le sens où ces familles génèrent des classes homologiques non nulles dans un des espaces de courbes décrits dans le paragraphe précédent. Nous considérons dans ce paragraphe  $(S^2, g_0)$  comme la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  pour le produit scalaire canonique, munie de la métrique induite.

Notons tout d'abord  $AS^2$  l'espace des cercles paramétrés. Un tel cercle est soit une application constante, soit un plongement  $c : S^1 \rightarrow S^2$  paramétré proportionnellement à la longueur d'arc, dont l'image est l'intersection de  $S^2$  avec un plan à distance  $< 1$  de l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace des grands cercles est noté  $BS^2$ .

L'image  $\pi_O(BS^2)$  (espace des grands cercles non paramétrés) est clairement en bijection avec  $S^2$ , et nous pouvons décrire la bijection comme suit : à chaque  $u \in S^2$  correspond le grand cercle non paramétré de  $S^2$  noté  $\gamma(u)$  obtenu comme l'intersection du plan orthogonal à  $u$  avec  $S^2$  orienté par la règle du tire-bouchon (cf figure 1).

Soit  $\mathcal{F} = \{\pi_S(\gamma(\cos(t\pi), \sin(t\pi), 0)), t \in [0, 1]\}$  la famille de courbes paramétrée par l'intervalle  $I = [0, 1]$ . Cette famille fournit un élément  $[F] \neq 0$  de l'homologie  $H_1(\tilde{\Pi} S^2, \mathbb{Z}_2)$ .

Soit  $u \in S^2$ . Pour chaque  $s \in [-1, 1]$ , nous pouvons associer un élément  $\gamma(u, s)$  de  $\pi_O(AS^2)$  (espace des cercles non paramétrés) obtenu comme l'intersection avec  $S^2$  du plan orthogonal à  $u$  translaté du vecteur  $su$  et orientée naturellement (cf figure 2).

Soit  $\mathcal{G}_u$  la famille d'éléments de  $\Pi S^2$  paramétrée par  $S^1$  obtenu comme la concaténation de la famille  $\{\gamma(u, s) \mid s \in [-1, 1]\}$  avec la famille de courbes

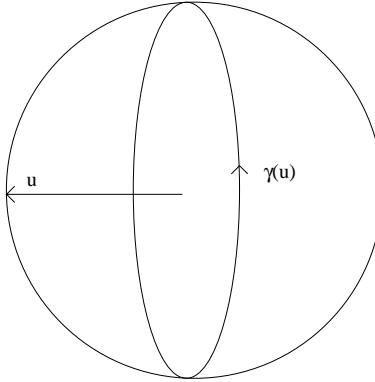


FIG. 1 – Le grand cercle associé à  $u$

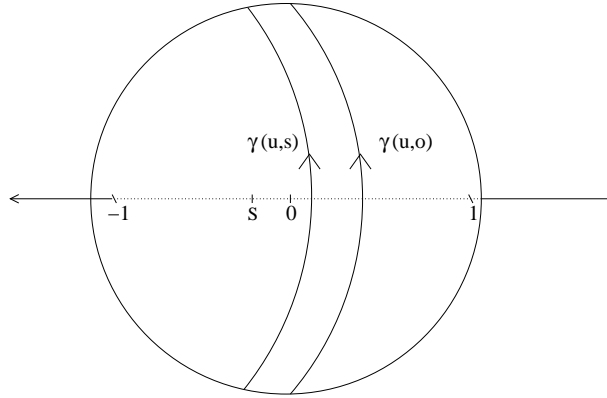


FIG. 2 – La famille  $\gamma(u, s)$

réduites à un point définie par un demi grand cercle reliant  $\gamma(u, -1)$  à  $\gamma(u, 1)$ . Cette famille fournit un élément non trivial de  $H_1(\Pi S^2, \mathbb{Z})$ .

**Tangent unitaire et métrique associée.** Soit  $U^{g_0}S^2$  le fibré tangent unitaire à  $(S^2, g_0)$  et  $\pi_{UM}$  la projection associée. Cet espace est isomorphe à  $BS^2$ .

Clairement, on a une action libre de  $S^1 \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  sur cet espace, dont le quotient coïncide avec l'espace des grands cercles non paramétrés  $\pi_O(BS^2) \simeq S^2$ .

La variété  $U^{g_0}S^2$  possède une métrique naturelle  $g_1$  vérifiant

$$dv_{g_1} = \alpha_{g_0} \wedge \pi_O^*(dv_{g_0}), \quad (2.3)$$

où  $\alpha_{g_0}$  désigne le tiré en arrière de la 1-forme de Liouville par l'isomorphisme musical bémol associé à  $g_0$ , ainsi que l'égalité suivante pour toute fonction

$f \in C^1(U^{g_0}S^2, \mathbb{R}) :$

$$\int f dv_{g_1} = \int f d\sigma \times dv_{g_0}, \quad (2.4)$$

où  $\sigma$  désigne la mesure canonique sur le cercle unité  $S^1$  (voir [1]).

## 2.2 Démonstration de l'inégalité (2.2)

Dans ce qui suit, et étant fixés  $u \in S^2$  et  $s \in [-1, 1]$ , nous allons considérer les longueurs des courbes  $\gamma(u)$  et  $\gamma(u, s)$ , qui seront alors vues comme des éléments de  $BS^2$  et  $AS^2$  respectivement, et donc paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc.

Posons, pour tout  $(q, v) \in U^{g_0}M$ ,

$$\Lambda(q, v) = \sqrt{g_t(q)(v, v)} = 1 + tf(q).$$

En intégrant cette fonction sur  $U^{g_0}S^2$  par rapport à la mesure canonique associée à  $g_1$ , on obtient d'une part,

$$\begin{aligned} \int_{U^{g_0}S^2} (1 + tf) dv_{g_1} &= \int_{S^2} \left( \int_{S^1} (1 + tf) d\sigma \right) dv_{g_0} \text{ (par (2.4))} \\ &= 2\pi \int_{S^2} (1 + tf) dv_{g_0} \\ &= 8\pi^2, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{U^{g_0}S^2} (1 + tf) dv_{g_1} &= \int_{\pi_O(BS^2)} \left( \int_{\pi_O^{-1}(\gamma)} (1 + tf) \cdot \alpha_g \right) dv_{g_0} \text{ (par (2.3))} \\ &= \int_{S^2} l_{g_t}(\gamma(u)) dv_{g_0}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la moyenne de la longueur respectivement à la métrique  $g_t$  sur l'espace des grands cercles non paramétrés est constante, à savoir

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} l_{g_t}(\gamma(u)) dv_{g_0} = 2\pi.$$

Remarquons qu'un calcul simple nous montre que pour tout  $u \in S^2$ ,

$$l_{g_t}(\gamma(u)) = 2\pi + t \int_{\gamma(u)} f \cdot \alpha_{g_0}.$$

Deux cas se présentent donc à nous :

*Premier cas.* Pour tout  $u \in S^2$ ,

$$\int_{\gamma(u)} f \cdot \alpha_{g_0} = 0.$$

Alors pour tout  $u \in S^2$  et  $|t| < a$ ,  $l_{g_t}(\gamma(u)) = 2\pi$ . Comme toute courbe  $c : S^1 = [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^2$  de  $\Lambda S^2$  vérifie

$$2 \cdot E_g(c) \leq l_g(c),$$

on obtient que pour tout  $u \in S^2$  et tout  $t \in ]-a, a[$ ,  $E_{g_t}(\gamma(u)) \leq \pi$ . Donc, pour tout  $c \in \mathcal{F}$ ,

$$E_{g_t}(c) \leq \pi.$$

Comme  $[\mathcal{F}] \neq 0$ , on obtient par le théorème 1 l'existence d'une géodésique fermée correspondant à cette classe d'énergie au plus  $\pi$ , donc de longueur au plus  $2\pi$  pour la métrique  $g_t$  avec  $|t| < a$ .

D'où l'inégalité (2.2) dans ce cas.

*Second cas.* Il existe  $u_0 \in S^2$ , tel que

$$\int_{\gamma(u_0)} f \cdot \alpha_{g_0} < 0.$$

Remarquons qu'alors, il existe nécessairement  $u_1 \in S^2$  tel que

$$\int_{\gamma(u_1)} f \cdot \alpha_{g_0} > 0.$$

Pour tout  $t \in ]0, a[$ ,  $l_{g_t}(\gamma(u_0)) < 2\pi$ . Donc il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $s \in ]-\beta, \beta[$  et tout  $t \in ]0, a[$ ,

$$l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi.$$

On se fixe alors  $\alpha_0 \in ]0, a[$  tel que pour  $t \in ]0, \alpha_0[$ ,  $l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi$  pour tout  $s \in [-1, 1] \setminus ]-\beta, \beta[$ . Nous obtenons ainsi, pour  $t \in ]0, \alpha_0[$  et pour tout  $s \in [-1, 1]$ ,

$$l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi.$$

Donc pour chaque  $c \in \mathcal{G}_{u_0}$ ,  $E_{g_t}(c) < \pi$ . De la non trivialité de  $[\mathcal{G}_{u_0}]$ , nous obtenons par le théorème 1 l'existence d'une géodésique fermée correspondant à la classe  $[\mathcal{G}_{u_0}]$  d'énergie au plus  $\pi$ , donc de longueur au plus  $2\pi$  pour la métrique  $g_t$  et ce pour tout  $t \in ]0, \alpha_0[$ .

De manière analogue, nous obtenons l'existence d'un  $\alpha_1 \in ]0, a[$  tel que pour tout  $t \in ]-\alpha_1, 0[$ , il existe une géodésique fermée correspondant à la classe  $[\mathcal{G}_{u_1}]$  d'énergie au plus  $\pi$ , donc de longueur au plus  $2\pi$  pour la métrique  $g_t$ .

On pose alors  $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$  et l'inégalité (2.2) est démontrée pour  $t \in ]-\alpha, \alpha[$ .



### 3 Aire systolique et parité

Nous présentons ici deux résultats : le premier est dû à V. Guillemin [5] et le second à P. Pu [9]. Ces résultats nous permettent de compléter le panorama des connaissances actuelles sur le comportement local de l'aire systolique au voisinage de  $g_0$ , ce qui justifie leur présentation ici.

Plus précisément, notons  $a$  l'antipodie de  $(S^2, g_0)$ . On définit la *sous-espace des fonctions paires*

$$C_+^\infty(S^2, \mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid f \circ a = f\},$$

et le *sous-espace des fonctions impaires*

$$C_-^\infty(S^2, \mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid f \circ a = -f\}.$$

Nous avons la décomposition suivante :

$$C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = C_+^\infty(S^2, \mathbb{R}) \oplus C_-^\infty(S^2, \mathbb{R}).$$

Nous allons voir que :

1). Pour toute fonction  $f \in C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , il existe une variation lisse  $g_t$  de  $g_0$  par des métriques lisses dans la direction tangente prescrite par  $f$  telle que pour  $t \geq 0$ ,

$$\mathfrak{S}(S^2, g_t) = 1/\pi.$$

2). Pour toute métrique lisse  $g$  paire respectivement à l'antipodie (*i.e.* vérifiant  $a^*g = g$ ), nous avons

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq 1/\pi,$$

avec égalité si et seulement si  $g = g_0$ .

Donc pour toute fonction  $f$  non nulle de  $C_+^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , la variation  $g_t = (1 + tf) \cdot g_0$  de  $g_0$  dans la direction tangente prescrite par  $f$  vérifie pour  $t \neq 0$ ,

$$\mathfrak{S}(S^2, g_t) > 1/\pi.$$

Remarquons qu'en combinant les points 1). et 2)., nous retrouvons le corollaire présenté dans l'introduction.

**Fonctions impaires et métriques de Zoll.** La définition suivante est classique (voir [1]). Une métrique riemannienne  $g$  de  $S^2$  est dite une *métrique de Zoll* si toutes les géodésiques de  $(S^2, g)$  sont périodiques de période  $2\pi$ . Remarquons que dans ce cas,  $\text{sys}(S^2, g) = 2\pi$ . Il est clair que la métrique standard  $g_0$  vérifie cette propriété : les géodésiques fermées sont les éléments de  $BS^2$ . Une métrique de Zoll  $g$  vérifie l'égalité suivante (voir [1] et [11]) :

$$\mathcal{A}(S^2, g) = \mathcal{A}(S^2, g_0),$$

ce qui a pour conséquence que

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \frac{1}{\pi}.$$

À l'heure actuelle, les exemples connus de métriques de Zoll sur la 2-sphère, autres que la métrique canonique, sont les suivants :

- les métriques de Zoll de révolution (voir [1] et [12]),
- certaines métriques obtenues comme variation lisse de la métrique standard  $(S^2, g_0)$  :

**Théorème 2** (voir [4] et [5]) *Pour toute fonction  $f \in C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , il existe une famille lisse à un paramètre de  $C^\infty$ -fonctions  $\rho_t$  telle que  $\rho_0 = 0$ ,  $\frac{d\rho_t}{dt}|_{t=0} = f$  et  $\exp(\rho_t) \cdot g_0$  soit une métrique de Zoll.*

Nous obtenons donc que pour toute fonction impaire  $f \in C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , il existe une variation  $\Psi_t^- \cdot g_0$  de la métrique  $g_0$  telle que  $\frac{d\Psi_t^-}{dt}|_{t=0} = f$  et

$$\mathfrak{S}(S^2, \Psi_t^- \cdot g_0) = \frac{1}{\pi}.$$

Ceci démontre le point 1).

**Fonctions paires et théorème de Pu.** Soit  $g$  une métrique sur  $S^2$  lisse et paire respectivement à l'antipodie. Comme  $a^*g = g$ , nous pouvons former le quotient  $S^2/a \simeq \mathbb{R}P^2$  et le munir de la métrique induite par  $g$  que nous noterons  $\tilde{g}$ .

Étant donnée une métrique riemannienne  $\hat{g}$  sur  $\mathbb{R}P^2$ , nous définissons la systole de  $(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$  comme la plus petite longueur d'une courbe non contractile et la notons  $\text{sys}(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$ . Cette longueur est réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée non contractile. Nous pouvons alors définir l'aire systolique de  $(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$  comme le quotient

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \hat{g}) = \frac{\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2, \hat{g})}{(\text{sys}(\mathbb{R}P^2, \hat{g}))^2}.$$

Nous observons que pour la métrique  $\tilde{g}$  définie à partir de la métrique  $g$  ci-dessus, nous avons

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2, \tilde{g}) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(S^2, g),$$

et

$$\text{sys}(\mathbb{R}P^2, \tilde{g}) \geq \frac{1}{2}\text{sys}(S^2, g).$$

On en déduit donc :

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq \frac{\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \tilde{g})}{2}.$$

L'aire systolique du plan projectif vérifie l'inégalité suivante :

**Théorème 3** (voir [9]) Soit  $\hat{g}$  une métrique riemannienne sur  $\mathbb{R}P^2$ . Alors

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \hat{g}) \geq \frac{2}{\pi},$$

avec égalité si et seulement si  $\hat{g}$  est la métrique standard.

Nous en déduisons donc pour toute métrique paire  $g$ ,

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq \mathfrak{S}(S^2, g_0) = \frac{1}{\pi},$$

avec égalité si et seulement si  $g = g_0$ .

Ceci démontre le point 2).

## 4 Remarques et perspectives

Il serait intéressant d'éclairer plusieurs points :

1). Pour tout vecteur tangent non nul  $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , nous avons construit une variation de métrique  $\Phi_t \cdot g_0$  telle que  $\Phi_0 = 1$ ,  $\frac{d\Phi_t}{dt}|_0 = f$ , et pour laquelle  $\mathfrak{S}(S^2, g_t) \geq \mathfrak{S}(S^2, g_0)$  pour  $t \geq 0$ . Il semble raisonnable de penser que la métrique  $g_0$  est un minimum local de l'aire systolique dans l'espace des métriques conformes à  $g_0$ , mais il n'y a, à l'heure actuelle et à la connaissance de l'auteur, aucune démonstration de cette conjecture.

2). De manière plus ambitieuse, il serait intéressant de mieux comprendre le comportement local de l'aire systolique au voisinage de  $g_0$ . La troisième section suggère une conjecture de la forme : il existe un voisinage ouvert  $U_0$  de 0 dans  $C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = C_+^\infty(S^2, \mathbb{R}) \oplus C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , un voisinage  $V_{g_0}$  de  $g_0$  dans l'espace des métriques lisses conformes à  $g_0$  muni de la topologie forte et un homéomorphisme local  $\phi : U_0 \rightarrow V_{g_0}$  tel que pour toute métrique  $g \in V_{g_0}$ , si on note  $\pi_+$  et  $\pi_-$  les projections respectives de  $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$  sur  $C_+^\infty(S^2, \mathbb{R})$  et  $C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$ , nous ayons

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \mathfrak{S}(S^2, g_0)(1 + \|\pi_+(\phi^{-1}(g))\|_2^2),$$

où  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{S^2} f^2 dv_{g_0}}$  pour tout  $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ .

3). Une question intéressante est la suivante : toute métrique de Zoll est-elle un point critique de la fonctionnelle aire systolique ? Plus généralement, la découverte d'autres points critiques serait remarquable, et il n'est pas clair qu'elles sont les métriques (en-dehors des métriques de Zoll et de l'exemple de Calabi) qui fourniraient de bons candidats.

*Remerciements.* - L'auteur tient à exprimer ici ces remerciements à I. Babenko, pour lui avoir présenté ce sujet de recherche, ainsi que pour les nombreuses conversations qui s'en sont suivies. Ses remerciements s'adressent également à M. Berger pour ses réponses sur certains points, à S. Sabourau pour ses remarques pertinentes, ainsi qu'à l'Université de Genève en la personne de P. de la Harpe d'une part, et au Centre Interfacultaire Bernoulli d'autre part, pour leur accueil respectif durant l'élaboration de cet article.

## Références

- [1] Besse, A. : *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1978).
- [2] Calabi, E. & Cao, J. : *Simple closed geodesics on convex surfaces*. J. Diff. Geom. **36** (1992), 517-550.
- [3] Croke, C. : *Area and the length of the shortest closed geodesic*, J. Differential Geometry **27** (1988), 1-22.
- [4] Funk, P. : *Über Fläschen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien*. Math. Ann. **74** (1913), 278-300.
- [5] Guillemin, V. : *The Radon transform on Zoll surfaces*. Advances in Math. **22** (1976), 85-119.
- [6] Klingenberg, W. : *Lectures on closed geodesics*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1978).
- [7] Morse, M. : *Topologically non-degenerate functions on a compact  $n$ -manifold*. J. Analyse Math. **7** (1959), 189-208.
- [8] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *The length of the shortest closed geodesic on a 2-dimensional sphere*, Int. Math. Res. Not. **23**, 2002, 1211-1222.
- [9] Pu, P. : *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*. Pacific. J. Math. **2** (1952), 55-72.
- [10] Sabourau, S. : *Filling radius and short closed geodesic of the sphere*, Bull. SMF **132**, 2004, 105-136.
- [11] Weinstein, A. : *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed*. J. Diff. Geom. **9** (1974), 513-517.
- [12] Zoll, O. : *Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien*. Math. Ann. **57** (1903), 108-133.